ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
21. siječnja 2016.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Na prvom je stajalištu izišlo 30 putnika, a ušlo 6 te ih je, nakon toga, bilo 48 u tramvaju. 2 BODA
Na drugom je stajalištu izišlo 20 putnika, a ušlo 8 pa ih je, nakon toga, bilo 36 u tramvaju. 2 BODA
Na trećem stajalištu izišlo je 15 putnika, a ušlo 10 te je vožnju nastavio 31 putnik. 2 BODA
………………………………………………………………………..… UKUPNO 6 BODOVA

2. Postoje 3 mogućnosti:
a)

VII + II = IX

2 BODA

b)

VIII + I = IX

2 BODA

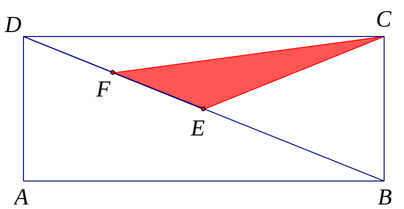
c)

VIII + II = X

2 BODA
……………………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Za svako napisano netočno premještanje umanjiti broj bodova za 1, ali najviše do 0 bodova.

3. Veliki kvadrat podijeljen na 4 manja jednaka kvadrata ima te kvadrate u 2 reda i 2 stupca te je broj točaka $(2+1)\cdot(2+1)=9$. 2 BODA
Veliki kvadrat podijeljen na 9 manjih jednakih kvadrata ima te kvadrate u 3 reda i 3 stupca te je broj točaka $(3+1)\cdot(3+1)=16$. 2 BODA
Tada veliki kvadrat podijeljen na 3600 manjih kvadrata ima te kvadrate u 60 redova i 60 stupaca pa je broj točaka $(60+1)\cdot(60+1)=3721$. 2 BODA
……………………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 2 boda.

4. Prvi način:



1 BOD

Neka je P površina trokuta ΔECF .

Točka F je polovište dužine $\overline{ED}$ pa vrijedi $|DF| = |FE|$ što znači da je površina trokuta ΔDFC jednaka površini trokuta ΔECF jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.

Dakle, površina trokuta ΔDEC jednaka je $2P$. 1 BOD

Točka E je polovište dužine $\overline{BD}$ pa vrijedi $|DE| = |EB|$ što znači da je površina trokuta ΔEBC jednaka površini trokuta ΔDEC jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.

Dakle, površina trokuta ΔEBC jednaka je $2P$ pa je površina trokuta ΔCDB jednaka $4P$. 1 BOD

Kako je $ABCD$ pravokutnik, vrijedi $|AB| = |CD|$, $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle DCB|$ i $|AD| = |CB|$ pa prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. 1 BOD

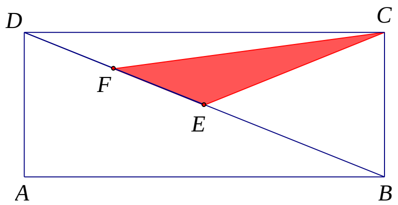
Prema tome je površina trokuta ΔABD jednaka $4P$, a površina četverokuta $ABCD$ jednaka je $8P$.
1 BOD

Količnik površine trokuta ΔECF i površine četverokuta $ABCD$ iznosi $\frac{P}{8P} = \frac{1}{8} = 0.125$. 1 BOD

……………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje bez objašnjenja sukladnosti trokuta bodovati s najviše 5 bodova. Ako nedostaju i druga potrebna objašnjenja, bodovati s najviše 3 boda.

Drugi način:



1 BOD

Točka F je polovište dužine $\overline{ED}$ pa vrijedi $|DF| = |FE|$ što znači da je površina trokuta ΔDFC jednaka površini trokuta ΔECF jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.

Dakle, površina trokuta ΔECF jednaka je $\frac{1}{2}$ površine trokuta ΔDEC . 1 BOD

Točka E je polovište dužine $\overline{BD}$ pa vrijedi $|DE| = |EB|$ što znači da je površina trokuta ΔEBC jednaka površini trokuta ΔDEC jer imaju osnovicu jednake duljine i zajedničku visinu iz vrha C.

Dakle, površina trokuta ΔDEC jednaka je $\frac{1}{2}$ površine trokuta ΔCDB odnosno površina trokuta ΔECF jednaka je $\frac{1}{4}$ površine trokuta ΔCDB. 1 BOD

Kako je $ABCD$ pravokutnik, vrijedi $|AB| = |CD|$, $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle DCB|$ i $|AD| = |CB|$ pa prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. 1 BOD

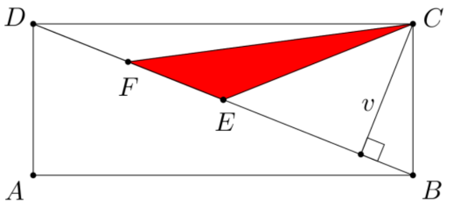
Prema tome je površina trokuta ΔCDB jednaka $\frac{1}{2}$ površine četverokuta $ABCD$ odnosno površina trokuta ΔECF jednaka je $\frac{1}{8}$ površine četverokuta $ABCD$. 1 BOD

Količnik površine trokuta ΔECF i površine četverokuta $ABCD$ iznosi $\frac{1}{8} = 0.125$. 1 BOD

……………………………………………..…………………………… UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje bez objašnjenja sukladnosti trokuta bodovati s najviše 5 bodova. Ako nedostaju i druga potrebna objašnjenja, bodovati s najviše 3 boda.

Treći način:

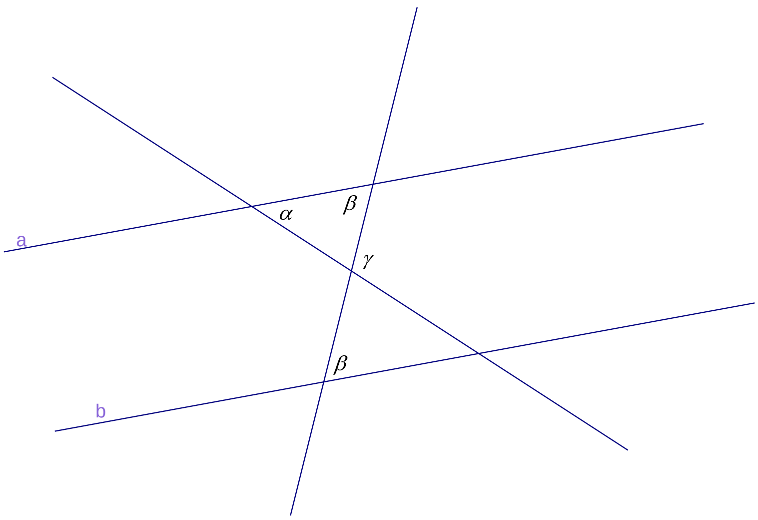


1 BOD

Označimo s d duljinu dijagonale $\overline{BD}$ pravokutnika $ABCD$.
Neka je v visina pravokutnog trokuta ΔBCD iz vrha C na hipotenuzu $\overline{BD}$.
Vrijedi $|EF| = \frac{1}{2}|ED| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{4}d$. 1 BOD
v je također i visina trokuta ΔECF.
Dakle, $P_{\Delta ECF} = \frac{|EF| \cdot v}{2} = \frac{\frac{1}{4}d \cdot v}{2} = \frac{dv}{8}$. 1 BOD
Kako je $ABCD$ pravokutnik, vrijedi $|AB| = |CD|$, $|\measuredangle BAD| = |\measuredangle DCB|$ i $|AD| = |CB|$ pa prema poučku S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ABD \cong \Delta CDB$. 1 BOD
Tada je $P_{ABCD} = 2P_{\Delta CDB} = 2 \cdot \frac{|BD| \cdot v}{2} = dv$. 1 BOD

Količnik površine trokuta ΔECF i površine četverokuta $ABCD$ iznosi $\frac{\frac{dv}{8}}{dv} = \frac{1}{8} = 0.125$. 1 BOD
……………….………………………………...…………………….. UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Rješenje bez objašnjenja sukladnosti trokuta bodovati s najviše 5 bodova. Ako nedostaju i druga potrebna objašnjenja, bodovati s najviše 3 boda.

5.



U trokutu uz pravac *a* kut kojemu krakovi pripadaju pravcu *a* i presječnici je sukladan kutu β jer su to šiljasti kutovi s usporednim kracima. 2 BODA
Dalje se u tom trokutu izračuna veličina trećeg kuta δ:
$\delta = 180° - (43° + 65°) = 180° - 108° = 72°$. 2 BODA
Kut γ je sukut tog kuta δ pa vrijedi $\gamma = 180° - 72° = 108°$. 2 BODA
……………………………………………...…………………………… UKUPNO 6 BODOVA
Napomena: Točan odgovor bez obrazloženja vrijedi 3 boda.

6. Prvi način:

Ako proširimo razlomke tako da im brojnici budu 8, onda vrijedi $\frac{8}{46} < \frac{8}{8p} < \frac{8}{19}$. 2 BODA

Dalje slijedi $19 < 8p < 46$. 2 BODA

To znači da je $8p \in \{ 24, 32, 40 \}$ 2 BODA

odnosno $p \in \{ 3, 4, 5 \}$. 2 BODA

S obzirom da je p prost broj, onda je $p \in \{ 3, 5 \}$. 2 BODA

………………………………………………..………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Iz $\frac{4}{23} < \frac{1}{p}$ slijedi $p < \frac{23}{4}$. 2 BODA

Iz $\frac{1}{p} < \frac{8}{19}$ slijedi $\frac{19}{8} < p$. 2 BODA

Dakle, $\frac{19}{8} < p < \frac{23}{4}$ 2 BODA

odnosno $p \in \{ 3, 4, 5 \}$. 2 BODA

S obzirom da je p prost broj, onda je $p \in \{ 3, 5 \}$. 2 BODA

………………………………………………..……..…………………… UKUPNO 10 BODOVA

7. Neka su m i n traženi prirodni brojevi te $m < n$.

Tada je $m \cdot n = 68040$ i $V(m,n) = 3780$. 1 BOD

Kako vrijedi $m \cdot n = D(m,n) \cdot V(m,n)$, slijedi $D(m,n) = 68040 : 3780 = 18$. 2 BODA

Uzimajući u obzir da je $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ 1 BOD

i $3780 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, 2 BODA

postoje sljedeće mogućnosti:

m	n
$2 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

2 BODA

Traženi brojevi su

m	n
18	3780
36	1890
54	1260
90	756
126	540
108	630
180	378
252	270

2 BODA

…………………………………………..………..………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako nisu nabrojane sve mogućnosti, onda bodovati na sljedeći način:

BROJ NAPISANIH MOGUĆNOSTI	BROJ BODOVA
7,6	8
5,4	6
3,2	4
1	2