

ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. siječnja 2015.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$2014 < \sqrt{x} < 2015 \quad /^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2014^2 < x < 2015^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2015^2 - 2014^2 = (2015 - 2014)(2015 + 2014) = 4029 \quad 2 \text{ BODA}$$

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

$$2015^2 - 2014^2 - 1 = 4029 - 1 = 4028. \quad 2 \text{ BODA}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$$2014 < \sqrt{x} < 2015 \quad /^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$2014^2 < x < 2015^2 \quad 1 \text{ BOD}$$

$$4\,056\,196 < x < 4\,060\,225 \quad 2 \text{ BODA}$$

Nejednakost zadovoljavaju brojevi 4 056 197, 4 056 198, ..., 4 060 224. 1 BOD

Ukupan broj prirodnih brojeva x za koje je nejednakost točna jednak je

$$4\,060\,224 - 4\,056\,196 = 4028. \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Razmjernost $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. 1 BOD

Podijelimo li brojnik i nazivnik zadanog izraza s b^2 i uvrstimo da je $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, dobivamo

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2}}{\frac{ab}{b^2} + \frac{b^2}{b^2}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2}{\frac{a}{b} + 1} = 2 \text{ BODA}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^2}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} = 2 \text{ BODA}$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35} \quad 1 \text{ BOD}$$

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Razmjernost $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $a = \frac{2}{5}b$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab + b^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}b\right)^2}{\frac{2}{5}b \cdot b + b^2} = \frac{\frac{4}{25}b^2}{\frac{2}{5}b^2 + b^2} = 2 \text{ BODA}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{4}{25}b^2}{\frac{7}{5}b^2} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{7}{5}} = \\
&= \frac{4 \cdot 5}{25 \cdot 7} = \frac{4}{35}
\end{aligned}$$

2 BODA

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $b = \frac{5}{2}a$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab+b^2} = \frac{a^2}{a \cdot \frac{5}{2}a + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{a^2}{\frac{5}{2}a^2 + \frac{25}{4}a^2} =$$

2 BODA

$$= \frac{a^2}{\frac{35}{4}a^2} = \frac{1}{\frac{35}{4}} =$$

2 BODA

$$= \frac{4}{35}$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Četvrti način:

Razmjer $a : b = 2 : 5$ možemo napisati u obliku $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab+b^2} = \frac{a^2}{b(a+b)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{a+b} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+1} =$$

2 BODA

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} =$$

2 BODA

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{35}$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Peti način:

Budući da vrijedi $a : b = 2 : 5$, postoji racionalan broj k takav da je $a = 2k$ i $b = 5k$. 1 BOD

$$\frac{a^2}{ab+b^2} = \frac{(2k)^2}{2k \cdot 5k + (5k)^2} =$$

2 BODA

$$= \frac{4k^2}{10k^2 + 25k^2} = \frac{4k^2}{35k^2} =$$

2 BODA

$$= \frac{4}{35}$$

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Kocka ima 8 vrhova. S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica koje su u vrhovima velike kocke. 2 BODA

Kocka ima 12 bridova. S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica koje su uz bridove velike kocke. 2 BODA

Kocka ima 6 strana. S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica, po jedna na svakoj strani kocke. 1 BOD

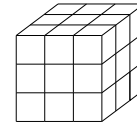
Niti s jedne strane nije obojena $27 - 8 - 12 - 6 = 1$ jedinična kockica.

1 BOD

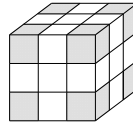
..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Nakon lijepljenja jediničnih kockica, velika kocka izgleda kao na donjoj slici.

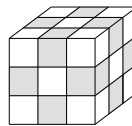


S tri strane obojeno je 8 jediničnih kockica.



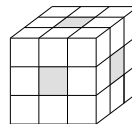
2 BODA

S dvije strane obojeno je 12 jediničnih kockica.



2 BODA

S jedne strane obojeno je 6 jediničnih kockica.



1 BOD

Niti s jedne strane nije obojena $27 - 8 - 12 - 6 = 1$ jedinična kockica.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Točni odgovori bez obrazloženja ili bez slike donose po 1 bod.

4. Neka je n broj stranica (vrhova) traženog mnogokuta.

Iz jednog vrha tog mnogokuta može se nacrtati $n - 3$ dijagonale,

a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta jednak je $\frac{n(n-3)}{2}$.

1 BOD

U mnogokutu koji ima $n + 5$ stranica,

iz jednog vrha može se nacrtati $n + 5 - 3 = n + 2$ dijagonale,

a ukupan broj dijagonala tog mnogokuta je $\frac{(n+5)(n+2)}{2}$.

1 BOD

Prema uvjetu zadatka vrijedi: $\frac{n(n-3)}{2} + 50 = \frac{(n+5)(n+2)}{2}$

1 BOD

Rješavanjem ove jednadžbe dobiva se redom

$$n(n-3) + 100 = (n+5)(n+2)$$

1 BOD

$$n^2 - 3n + 100 = n^2 + 7n + 10$$

1 BOD

$$10n = 90$$

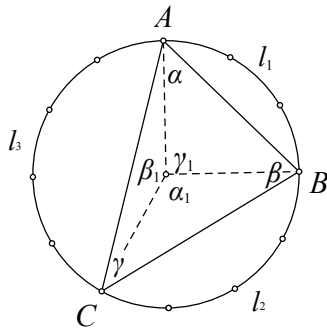
i konačno $n = 9$.

1 BOD

..... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova. Ako nema svih računa, nego samo točan konačan rezultat, onda se boduje s 2 boda.

5. Prvi način:



Duljine kružnih lukova \widehat{AB} , \widehat{BC} i \widehat{AC} označimo redom l_1 , l_2 i l_3 , a odgovarajuće im središnje kutove γ_1 , α_1 i β_1 .

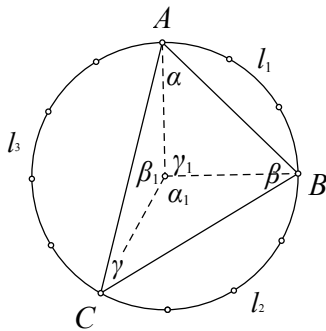
Budući da je $l_1 = \frac{3}{12} \cdot 2r\pi = \frac{1}{4} \cdot 2r\pi$ i $l_1 = \frac{r\pi}{180^\circ} \cdot \gamma_1$, slijedi da je $\gamma_1 = \frac{r\pi}{2} \cdot \frac{180^\circ}{r\pi} = 90^\circ$. 2 BODA

Analogno dobivamo da je $\alpha_1 = 120^\circ$ i $\beta_1 = 150^\circ$. 2 BODA

Kutovi trokuta α , β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1 , β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$ i $\gamma = 45^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:



Duljine kružnih lukova iste kružnice proporcionalne su veličinama pripadnih središnjih kutova pa uz oznake kao na slici vrijedi $\gamma_1 : \alpha_1 : \beta_1 = 3 : 4 : 5$. 1 BOD

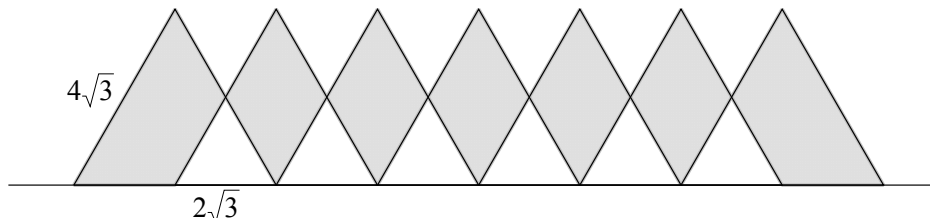
Budući da je $\gamma_1 + \alpha_1 + \beta_1 = 360^\circ$ i $360^\circ : (3 + 4 + 5) = 360^\circ : 12 = 30^\circ$, 1 BOD

zaključujemo da je $\gamma_1 = 3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$, $\alpha_1 = 4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ i $\beta_1 = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$. 2 BODA

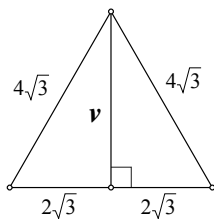
Kutovi trokuta α , β i γ obodni su kutovi odgovarajućih središnjih kutova α_1 , β_1 i γ_1 pa je konačno $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 75^\circ$ i $\gamma = 45^\circ$. 2 BODA

..... UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:



Površina sivog dijela jednaka je zbroju površina 7 sukladnih jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3}$ cm umanjenim za zbroj $2 \cdot 6 = 12$ površina (na „bijelim mjestima“ preklopljeni su i oduzeti dijelovi dvaju trokuta!) jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3}$ cm. 3 BODA
Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.



$$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$$

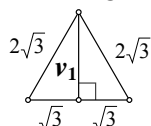
$$v = 6 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$v_1 = 3 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

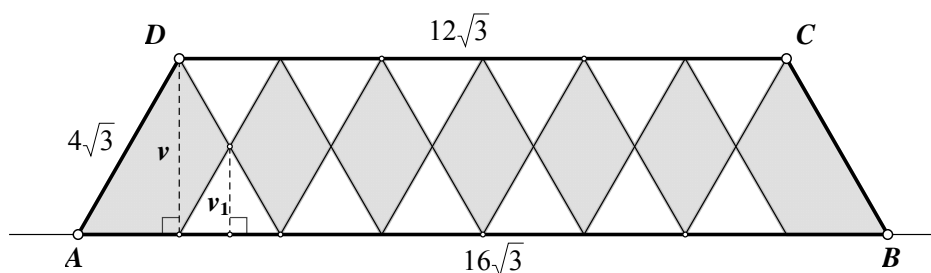
1 BOD

Površina sivog dijela lika jednaka je $7 \cdot P_1 - 12 \cdot P_2 = 7 \cdot 12\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



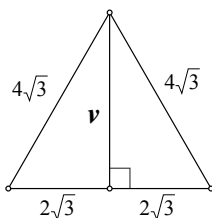
Površina sivog dijela jednaka je površini trapeza $ABCD$ umanjenoj za zbroj površina 12 „bijelih“ jednakostraničnih trokuta.

2 BODA

Duljine osnovica trapeza su $|AB| = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ cm}$ i $|CD| = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$

1 BOD

Duljina visine trapeza jednaka je duljini visine jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3} \text{ cm}$. Određujemo je primjenom Pitagorinog poučka.



$$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$$

$$v = 6 \text{ cm}$$

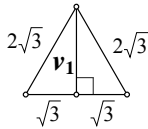
2 BODA

Površina trapeza $ABCD$ jednaka je

$$P_{ABCD} = \frac{16\sqrt{3} + 12\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 14\sqrt{3} \cdot 6 = 84\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$v_1 = 3 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

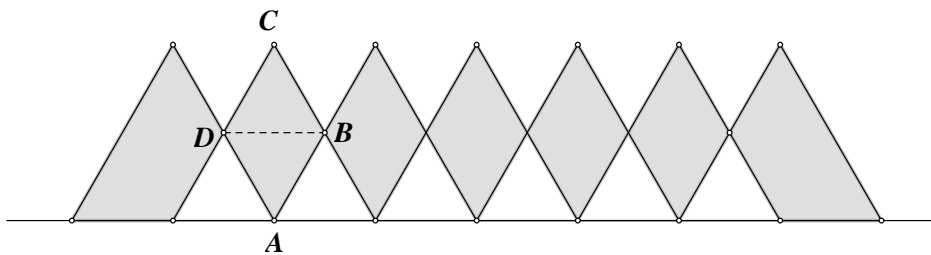
Površina sivog dijela lika jednaka je $P_{ABCD} - 12 \cdot P_1 = 84\sqrt{3} - 12 \cdot 3\sqrt{3} = 84\sqrt{3} - 36\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

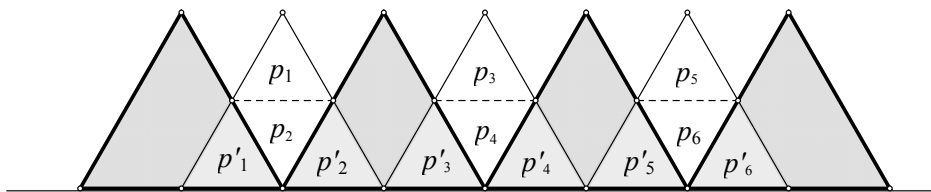
Treći način:

Romb $ABCD$ na slici sastavljen je od dva sukladna jednakostranična trokuta sa stranicom duljine $2\sqrt{3} \text{ cm}$. Ti su trokuti sukladni „bijelim“ trokutima sa slike



2 BODA

Neke od „sivih“ rombova možemo podijeliti na trokute i presložiti tako da popune bijele dijelove, kao što je prikazano na slici:

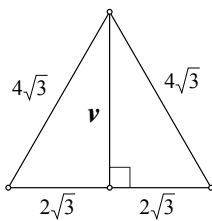


2 BODA

Dakle, površina sivih dijelova slike jednaka je površini četiriju jednakostraničnih trokuta sa stranicom duljine $4\sqrt{3} \text{ cm}$.

2 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine većeg trokuta.



$$v^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 48 - 12 = 36$$

$$v = 6 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

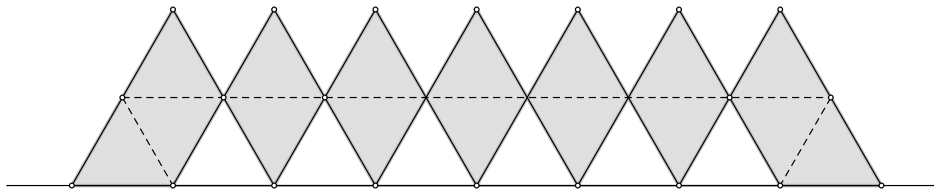
Površina sivog dijela lika jednaka je $4 \cdot P = 4 \cdot 12\sqrt{3} = 48\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:

Sivi dio zadanog lika možemo podijeliti, kao što je prikazano na slici, na 16 jednakostraničnih trokuta.

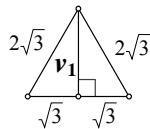


3 BODA

Budući da su dužinama spajana polovišta stranica jednakostraničnih trokuta, dobiveni su trokuti slični zadanom „velikom“ trokutu, s upola kraćim stranicama. Dakle, duljina stranice tih trokuta je $2\sqrt{3}$ cm.

3 BODA

Primjenom Pitagorinog poučka izračuna se duljina visine manjeg trokuta.



$$v_1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2 = 12 - 3 = 9$$

$$v_1 = 3 \text{ cm}$$

2 BODA

Površina tog trokuta jednaka je $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$ cm².

1 BOD

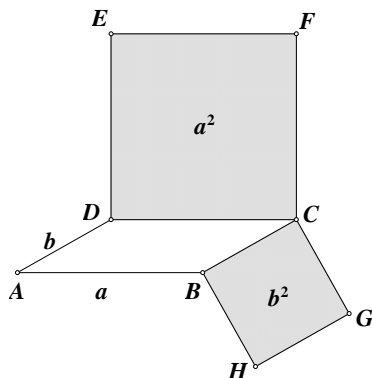
Površina sivog dijela lika jednaka je $16 \cdot P_1 = 16 \cdot 3\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ cm².

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Točno izračunata površina velikog trokuta, odnosno površina malog trokuta vrednuje se s po 3 boda (ako su ispravno izračunate obje površine, to donosi ukupno 6 bodova).

7. Prvi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a b duljinu kraće stranice.)

1 BOD

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

$$\text{i } a^2 + b^2 = 113.$$

1 BOD

Budući da je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo $15^2 = 113 + 2ab$ odnosno

$$2ab = 225 - 113 = 112.$$

2 BODA

Budući da je $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, nakon uvrštavanja dobivamo

$$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = 113 - 112, \text{ odnosno } (a - b)^2 = 1.$$

2 BODA

Ako je $(a - b)^2 = 1$, onda (uz pretpostavku da je $a > b$ tj. da je $a - b > 0$) mora biti $a - b = 1$.

2 BODA

Duljine stranica zadovoljavaju sustav jednačbi $\begin{cases} a + b = 15 \\ a - b = 1 \end{cases}$

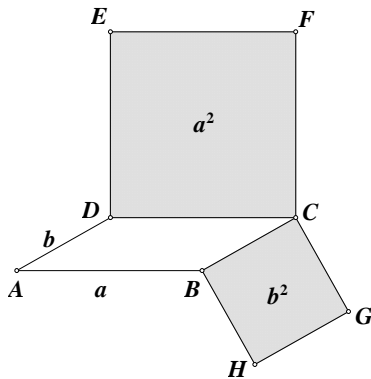
1 BOD

Rješavanjem sustava nalazimo rješenje $a = 8$ cm i $b = 7$ cm.

1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica ili opis (Označimo sa a duljinu veće, a sa b duljinu kraće stranice.) 1 BOD

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

i $a^2 + b^2 = 113$. 1 BOD

Iz $a + b = 15$ slijedi da je $b = 15 - a$ pa nakon uvrštavanja dobivamo $a^2 + (15 - a)^2 = 113$ 1 BOD

odnosno $a^2 + 225 - 30a + a^2 = 113$. 1 BOD

Sređivanjem jednadžbe dobivamo $2a^2 - 30a + 112 = 0$, a nakon dijeljenja cijele jednadžbe s 2, dobivamo $a^2 - 15a + 56 = 0$. 1 BOD

Tu jednadžbu možemo faktorizirati tj. napisati u obliku umnoška $(a - 8)(a - 7) = 0$. 2 BODA

Umnožak dvaju brojeva jednak je nuli samo u slučaju da je jedan od tih brojeva jednak nuli, 1 BOD

tj. samo u slučaju $a = 8$ cm (i tada je $b = 7$ cm) ili $a = 7$ cm (i tada je $b = 8$ cm). 1 BOD

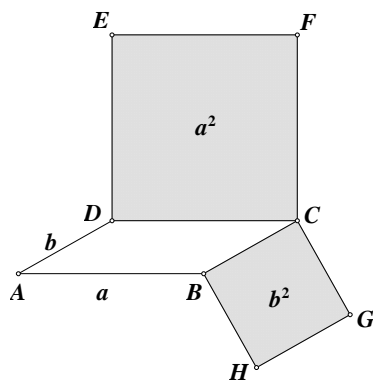
Kako smo označili sa a dulju stranicu paralelograma, drugi slučaj otpada.

Dakle, $a = 8$ cm i $b = 7$ cm. 1 BOD

..... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Analogan postupak i bodovanje provodi se u slučaju da je korištena supstitucija $a = 15 - b$.

Napomena: Rješenje dobiveno metodom uzastopnog približavanja (npr. ispunjavanjem tablice) može se bodovati s 10 bodova, ali mora biti jasno navedeno značenje korištenih oznaka i vidljiv zapis postupka (račun). Dakle, tim načinima rješavanja mora prethoditi skica ili opis



(Označimo sa a duljinu veće, a sa b duljinu kraće stranice.)

Tada vrijedi $2a + 2b = 30$ odnosno $a + b = 15$

i $a^2 + b^2 = 113$.

a	14	13	12	11	10	9	8
$b = 15 - a$	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 + b^2$	197	173	153	127	125	117	113

U tom se slučaju rješenje može bodovati s 10 bodova. Ako oznaka, računa i objašnjenja nema, točan konačan rezultat donosi 2 boda.