OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo broj x:

$$x = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} : \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{5} - \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{9}{5} - \frac{4}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

4 BODA

Slično, uporabom formule za kvadrat zbroja, imamo

$$y = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)^2 = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2} + 1\right) = \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \sqrt{2} - 1 = 1.$$

4 BODA

Dakle, vrijedi da je $x = y$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

2. Kako su dječaci postigli prosjek 87 bodova, oni su zajedno sakupili $12 \cdot 87 = 1044$ boda. 1 BOD

Djevojčice su zajedno sakupile $18x$ bodova, pri čemu je x njihov prosjek koji trebamo izračunati. 1 BOD

Prema tome, učenici su zajedno sakupili $1044 + 18x$ bodova. 1 BOD

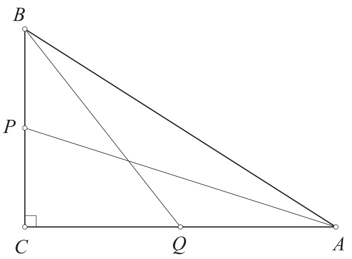
U razredu ima $12 + 18 = 30$ učenika. 1 BOD

Kako je prosjek razreda 90 bodova, vrijedi jednadžba $\dfrac{1044 + 18x}{30} = 90.$ 2 BODA

Rješavanjem jednadžbe dobivamo $1044 + 18x = 2700$, odnosno $18x = 2700 - 1044 = 1656$,
odakle je $x = \dfrac{1656}{18} = 92.$ 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Označimo duljine kateta i hipotenuze na uobičajen način: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$.



1 BOD

Primijenimo li Pitagorin poučak na pravokutne trokute APC i BCQ, dobivamo sljedeće dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{4} + b^2 &= |AP|^2 = 25, \\ a^2 + \frac{b^2}{4} &= |BQ|^2 = 40. \end{aligned}$$

4 BODA

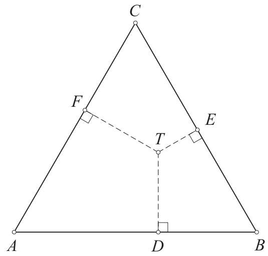
Zbrajanjem tih dviju jednakosti slijedi jednakost $\dfrac{5}{4}\left(a^2 + b^2\right) = 65.$ 2 BODA

Međutim, zbog Pitagorinog poučka je $a^2 + b^2 = c^2$, pa uvrštavanjem u prethodnu jednakost
dobivamo da je $\dfrac{5}{4}c^2 = 65$, odnosno $c^2 = 52$. 2 BODA

Konačno, $c = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ cm. 1 BOD

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka su D, E, F redom nožišta okomica iz točke T na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ kao na slici:



1 BOD

Prema uvjetu zadatka je $|TD| = 1$, $|TE| = 2$ i $|TF| = 3$. Prikažimo sada površinu trokuta ABC kao zbroj površina triju trokuta:

$$P(ABC) = P(ABT) + P(BCT) + P(CAT).$$

2 BODA

Kako je površina trokuta jednaka umnošku duljina stranice i visine, imamo da je

$$P(ABC) = \frac{a \cdot |TD|}{2} + \frac{a \cdot |TE|}{2} + \frac{a \cdot |TF|}{2} = \frac{a}{2}\left(|TD| + |TE| + |TF|\right) = \frac{a}{2}(1+2+3) = 3a.$$

3 BODA

S druge strane, površina jednakostraničnog trokuta je $P(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, pa izjednačavanjem dobivenih dvaju izraza za površinu slijedi da je $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3a$, odakle je $a = \dfrac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$. 2 BODA

Konačno, iz formule za površinu trokuta dobivamo $P(ABC) = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{48\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ cm^2. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5. Zapišimo dani izraz u drugom obliku, služeći se formulom za kvadrat zbroja:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x + 8 &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x^2 + 12x + 12 - 4 \\ &= (x+2y)^2 + 3(x^2 + 4x + 4) - 4 \\ &= (x+2y)^2 + 3(x+2)^2 - 4. \end{aligned}$$

5 BODOVA

Kako je kvadrat broja uvijek nenegativan, zaključujemo da je $(x+2y)^2 \geq 0$ i $(x+2)^2 \geq 0$, pa se najmanja vrijednost postiže kada je $(x+2y)^2 = (x+2)^2 = 0$, te je ona jednaka -4. 3 BODA

Najmanja vrijednost se postiže kada je $x + 2y = 0$ i $x + 2 = 0$. Iz druge jednadžbe slijedi da je $x = -2$, a iz prve $y = -\dfrac{x}{2} = -\dfrac{-2}{2} = 1$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA