OPĆINSKO/ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – rješenja

29. siječnja 2009.

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunajmo prvo brojeve a i b. Imamo da je

$$a = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(\frac{4}{5} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} : \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot (-5) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}.$$

3 BODA

Slično je

$$b = \frac{2}{\frac{1}{3} - 2} : 2\frac{2}{5} + 2.5 = \frac{2}{-\frac{5}{3}} : \frac{12}{5} + \frac{5}{2} = \frac{-6}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

4 BODA

Na kraju, dobivamo:

$$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{\frac{5}{2}}{2} - \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{4} - \frac{4}{5} = \frac{25-16}{20} = \frac{9}{20}.$$

3 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

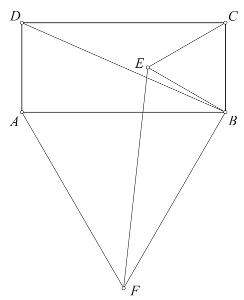
2. Neka je x brzina rijeke, izražena u km/h. Ukoliko se brodić kreće nizvodno,
njegova je brzina jednaka $15 + x$. 2 BODA
Ukoliko se brodić kreće uzvodno, njegova je brzina jednaka $15 - x$. 2 BODA
Kako brodić za isto vrijeme prijeđe put od 34 km nizvodno i put od 26 km uzvodno,
vrijedi razmjer $34 : (15 + x) = 26 : (15 - x)$. 2 BODA
Iz tog razmjera slijedi $34(15 - x) = 26(15 + x)$, tj. $510 - 34x = 390 + 26x$,
odnosno $60x = 120$, odakle je $x = 2\ km/h$. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka je x stara cijena izleta kod Duje izražena u kunama. Tada je $x + 80$ stara cijena izleta kod Frane. 1 BOD
Nakon promjene, nova cijena kod Frane je $0.9(x + 80)$, a kod Duje $1.15x$. 2 BODA
Kako je , prema uvjetu zadatka, razlika u novim cijenama 8 kn,
vrijedi jednadžba $1.15x - 8 = 0.9(x + 80)$, odakle je $0.25x = 80$, odnosno $x = 320$. 3 BODA
Dakle, nova cijena kod Duje je $1.15 \cdot 320 = 368$ kn, a kod Frane $0.9 \cdot 400 = 360$ kn. 4 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

4.



1 BOD

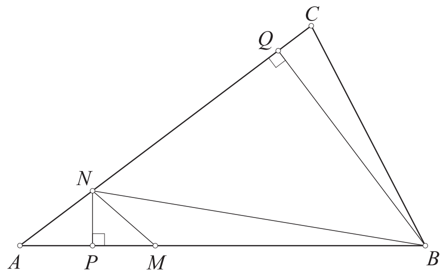
Promatrajmo trokute FBE i ABD. Dokazat ćemo da su oni sukladni.
Očito, vrijedi $|AD| = |BE|$ zato jer je trokut BCE jednakostraničan. 1 BOD
Slično, vrijedi $|AB| = |BF|$ zato jer je trokut AFB jednakostraničan. 1 BOD
Dokažimo da je $\sphericalangle FBE$ pravi. Naime, kako je trokut BCE jednakostraničan, slijedi da je
$\sphericalangle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, pa je $\sphericalangle FBE = \sphericalangle FBA + \sphericalangle ABE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. 3 BODA

Dakle, trokuti FBE i ABD se podudaraju u dvije stranice i kutu među njima, pa su oni sukladni prema poučku $S-K-S$. 2 BODA

Iz dobivene sukladnosti zaključujemo kako se trokuti FBE i ABD podudaraju u svim elementima, pa je $|EF|=|BD|$, što je i trebalo dokazati. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA

5.



1 BOD

Kako je $|AM|:|MB|=1:2$, slijedi da je $|AM|=\frac{1}{3}|AB|$. Slično, zbog $|AN|:|NC|=1:3$, vrijedi $|AN|=\frac{1}{4}|AC|$. 1 BOD

Usporedimo površine trokuta AMN i ABN. Ta dva trokuta imaju zajedničku visinu, povučenu iz točke N, pa im se površine odnose kao odgovarajuće osnovice. Dakle, imamo

$$\frac{P(AMN)}{P(ABN)}=\frac{\frac{|AM|\cdot|NP|}{2}}{\frac{|AB|\cdot|NP|}{2}}=\frac{|AM|}{|AB|}=\frac{1}{3},$$

pri čemu je P nožište visine iz točke N na pravac AB. Zbog toga je $P(AMN)=\frac{1}{3}P(ABN)$. 3 BODA

Slično, usporedimo površine trokuta ABN i ABC. Ta dva trokuta imaju zajedničku visinu, povučenu iz vrha B, pa im se površine odnose kao odgovarajuće osnovice. Dakle, imamo

$$\frac{P(ABN)}{P(ABC)}=\frac{\frac{|AN|\cdot|BQ|}{2}}{\frac{|AC|\cdot|BQ|}{2}}=\frac{|AN|}{|AC|}=\frac{1}{4},$$

pri čemu je Q nožište visine iz točke B na pravac AC.

Zbog toga je $P(ABN)=\frac{1}{4}P(ABC)=\frac{1}{4}\cdot 12=3\ \mathrm{cm}^2$. 3 BODA

Konačno, vrijedi $P(AMN)=\frac{1}{3}P(ABN)=\frac{1}{3}\cdot 3=1\ \mathrm{cm}^2$. 2 BODA

. . . . UKUPNO 10 BODOVA